# Вывод формул для схемы Горнера.

**Схе́ма Го́рнера** (или **правило Горнера**, **метод Горнера, метод Руффини-Горнера**) — алгоритм вычисления значения многочлена, записанного в виде суммы одночленов, при заданном значении переменной. Метод Горнера позволяет найти корни многочлена. Схема Горнера также является простым алгоритмом для деления многочлена на бином вида $x - c$. Метод назван в честь Уильяма Джорджа Горнера (англ. William George Horner, 1786 — 22 сентября 1837) — британский математик, в честь которого названа схема Горнера), однако Паоло Руффини (Паоло Руффини (итал. *Paolo Ruffini*; 1765—1822) — итальянский математик, доктор медицины) опередил Горнера на 15 лет, а китайцам этот способ был известен еще в XIII веке.

- ✓ Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на двучлен $(x - c)$ значит найти такой многочлен $q(x)$ и такое число r, что $f(x) = (x-c)q(x) + r$.
- ✓ Запишем это равенство более подробно:
- ✓ $f_0x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n = (x-c)(q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}) + r$.
- ✓ :Далее, начнём раскрывать скобки:
- ✓ $f_0x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n = (\underbrace{x-c)(q_0x^{n-1}}_{\text{перемножая, найдём коэффициент при } x^n} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}) + r$.
- ✓ Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях: $x^n : f_0 = q_0$;
- ✓ $f_0x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n = (\underbrace{x - \underbrace{c)(q_0x^{n-1}}_{\text{перемножая, найдём коэффициент при } x^{n-1}} + q_1x^{n-2}}_{\text{перемножая, найдём коэффициент при } x^{n-1}} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}) + r$.
- ✓ Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях: $x^{n-1}$: $f_1 = q_1 - c \cdot q_0$;
- ✓ $f_0x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n = (\underbrace{x - \underbrace{c)(q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2}}_{\text{перемножая, найдём коэффициент при } x^{n-2}} + q_2x^{n-3}}_{\text{перемножая, найдём коэффициент при } x^{n-2}} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}) + r$.
- ✓ Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях: $x^{n-2}$: $f_2 = q_2 - c \cdot q_1$;
- ✓ Таким образом, $\begin{cases} f_0 = q_0 \\ f_1 = q_1 - c \cdot q_0 \\ f_2 = q_2 - c \cdot q_1 \\ \ldots \end{cases}$
- ✓ Далее,
- ✓ $f_0x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n = (\underbrace{x - \underbrace{c)(q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x}_{\text{перемножая, найдём коэффициент при } x} + q_{n-1}}_{\text{перемножая, найдём коэффициент при } x}) + r$.
- ✓ Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях: $x$: $f_{n-1} = q_{n-1} - c \cdot q_{n-2}$;
- ✓ Таким образом, $\begin{cases} f_0 = q_0 \\ f_1 = q_1 - c \cdot q_0 \\ f_2 = q_2 - c \cdot q_1 \\ \ldots \\ f_{n-1} = q_{n-1} - c \cdot q_{n-2} \end{cases}$.
- ✓ Наконец,
- ✓ $f_0x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n = (x - \underbrace{c)(q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}}_{\text{перемножая, найдём коэффициент при } x^0}) + r$.
- ✓ Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях: $x^0$: $f_n = r - c \cdot q_{n-1}$;
- ✓ Итак, получаем систему:
- ✓ $\begin{cases} f_0 = q_0 \\ f_1 = q_1 - c \cdot q_0 \\ f_2 = q_2 - c \cdot q_1 \\ \ldots \\ f_{n-1} = q_{n-1} - c \cdot q_{n-2} \\ f_n = r - c \cdot q_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_0 = q_0 \\ q_1 = f_1 + c \cdot q_0 \\ q_2 = f_2 + c \cdot q_1 \\ \ldots \\ q_{n-1} = f_{n-1} + c \cdot q_{n-2} \\ r = f_n + c \cdot q_{n-1} \end{cases}$

- Таким образом, реккурентная формула зависимости коэффициентов многочлена делимого от коэффициентов многочлена частного и остатка такова:

$$q_i = f_i + c \cdot q_{i-1}$$

- Пример:
- Покажем, как оформить в виде таблицы деление с остатком многочлена $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6x + 3$ на двучлен $x + 1$:

| | 2 | 0 | -7 | 6 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 2 | -2 | -5 | 11 | -8 |

- Сносим старший коэффициент: 2.
- Далее, согласно реккурентной формуле считаем:
- $(-1) \cdot 2 + 0 = -2.$
- $(-1) \cdot (-2) + (-7) = -5.$
- $(-1) \cdot (-5) + 6 = 11.$
- $(-1) \cdot 11 + 3 = -8.$
- Ответ: $q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 11, r = -8;$
- или $f(x)$ можно представить в виде: $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6x + 3 = (x + 1)(2x^3 - 2x^2 - 5x + 11) - 8.$