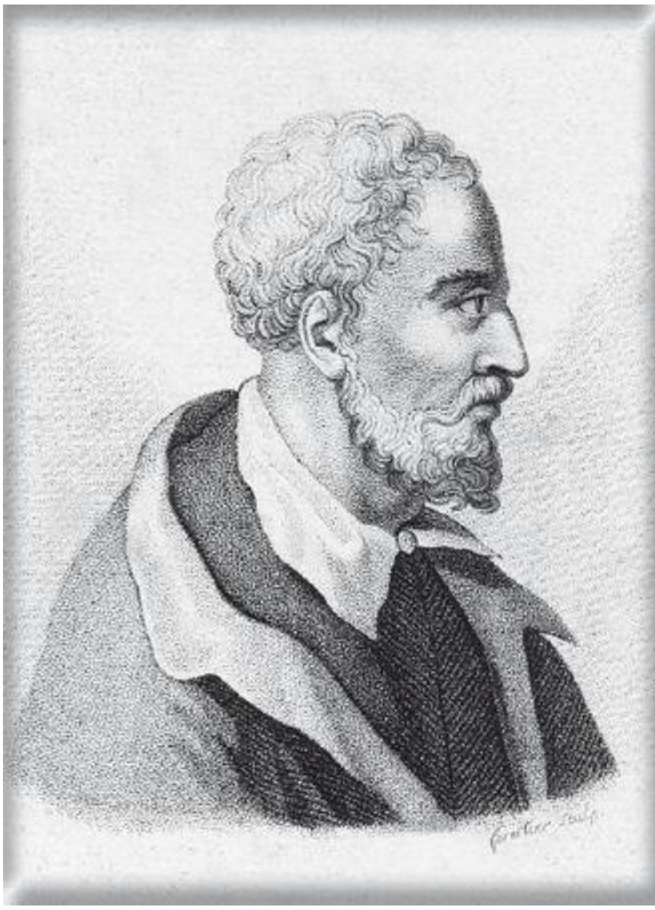
Решение уравнений третьей и четвёртой степени.

•Три науки он считал "божественными": медицину, математику и астрологию.
•Его жизнь – одна из наиболее необычных, которые мы знаем. Впадая из одной крайности в другую, из противоречия в противоречие, он соединял возвышенную мудрость и невероятную нелепость.
•Никого нет мудрее его, когда он прав, и никого безумней, когда неправ.
• ..(Он)…уподобляется грубому и безумному сочинителю басен, хотя в тысячу раз более учен.
• Он – Джероламо Кардано.



Джероламо Кардано (1501 - 1576)

итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог.

•Мы не должны говорить о том, что его великий ум смешан с безумием, но напротив, что его безумие смешано с великим умом.

Г. Нодэ (1600–1653)

•Я обязуюсь найти у Кардано мысли каких угодно авторов.

Ш. Л. Монтескье (1689–1755)

• Он переполнен таким количеством опрометчивых идей, что практически не в состоянии критически отнестись даже к одной сотой части их.

И. Кеплер (1571–1630)

•Гений, но не характер.

М. Кантор (1829–1920)

•Шестнадцатый век – Чинквеченто – последний век Возрождения, этой героической и возвышенной эпохи, когда, по словам историка, "человек дрожал, как натянутая струна, приведенная в движение смычком: он проявлял исключительную энергию, гениальную изобретательность, умопомрачительную фантазию..”.
•В это трудное время в Италии жил великий итальянский математик, врач, философ, астролог, изобретатель и писатель Джероламо Кардано. Его долгая и бурная жизнь была полна взлетов и падений.
•Шестнадцатый век – это век Леонардо да Винчи, Тициана, Микеланджело Буонаротти, Николая Коперника, Эразма Роттердамского, Тихо Браге, Мартина Лютера, Фернана Магеллана, Франсуа Виета, Джордано Бруно и многих, многих других.
•Это век, когда Земля была низвергнута с пьедестала и перенесена из центра Вселенной на орбиту, по которой она вращалась вокруг великого и неподвижного Светила. Этим был нанесен сокрушительный удар по религии, ибо если Земля – рядовая планета, то и человек – не венец божественного творения.
•Государственно раздробленная, состоявшая из многочисленных мелких монархий и городских республик, Италия стала легкой добычей двух могущественных держав – Франции и Испании. Соперничество между ними привело к тому, что французы в конце концов были вытеснены из страны и большая ее часть оказалась под пятой испанских Габсбургов.
•В Италии XVI века гнет религиозный соединился с гнетом чужеземного владычества, и этот двойной пресс, усиленный общим экономическим упадком в стране, в начале следующего века переместил родину Возрождения на второй план.

•Джероламо Кардано знал застенки инквизиции и дворцы вельмож; ему пришлось познать голод, нищету, унижения, обиды, но и приобрести репутацию лучшего врача Европы, советов которого домогались римские папы и государи, вкусить славы великого математика, известного литератора, автора многих десятков книг. Почти ровесник своего века, он усвоил и принял все его предрассудки и заблуждения: гениальные алгебраические открытия у него соседствовали со средневековыми представлениями о мире, описания хитроумных механизмов перемежались сообщениями о чудесах и различных пророчествах и чудищах. Бесстрашный философ, отрицавший бессмертие души, он приходил в трепет от любого дурного предчувствия и твердо верил в амулеты, признавал "вещие сны", другие предзнаменования, мистическую власть чисел.

•Для нас, конечно, важны не заблуждения Кардано, столь характерные для его времени, а замечательные математические открытия и смелые философские построения.

•Кардано внёс значительный вклад в развитие алгебры. Он первым в Европе стал использовать отрицательные корни уравнений. Его имя носит формула Кардано для нахождения корней кубического неполного уравнения. На самом деле Кардано не открывал этот алгоритм и даже не пытался приписать его себе. В своём трактате «Великое искусство» он признаётся, что узнал формулу от Никколо Тартальи, пообещав сохранить её в тайне, однако обещание не сдержал и спустя 6 лет (в 1545 году) опубликовал упомянутый трактат. Из него учёный мир впервые узнал о деталях замечательного открытия. Кардано оправдывал нарушение обещания тем, что он включил в свою книгу новые открытия, сделанные им самим и его учеником Луиджи Феррари, в том числе общее решение уравнения четвёртой степени.

•В 1663 году была опубликована (посмертно) ещё одна работа Кардано, называвшаяся «Книгой об игре в кости» — исследование по математической теории азартных игр, написанная в 1526 году. Это был один из первых серьёзных трудов по комбинаторике и теории вероятностей. Хотя Кардано допустил там ряд ошибок, он первым близко подошёл к общему понятию вероятности.

•В историю криптографии Кардано вошёл как изобретатель несложного шифровального устройства, использовавшегося в переписках и получившего название «решётка Кардано».

О формуле Кардано.

• **Около 1515 года**

Сципион дель Ферро, профессор Болонского университета, где он читал лекции по арифметике и геометрии, находит "великое правило" – способ решения кубического уравнения вида

$$x^3 + qx = r.$$

•В те времена получил распространение особый вид общения ученых – публичный научный диспут (поединок, турнир). Такой поединок по математике состоял в том, что два математика предлагали друг другу для решения определенное количество задач (несколько десятков) с числовыми данными. Выигрывал поединок тот, кто решал большее число предложенных задач. Победитель получал денежное вознаграждение, известность, нередко ему предлагались должности на выгодных условиях.

•Об открытии узнали некоторые ученики болонского профессора и в их числе – довольно посредственный математик Антонио Фиоре.

•Фиоре вызывает на публичный диспут математика– Никколо Тарталью. Он предложил ему задачи, большинство которых сводилось к решению кубических уравнений.

В детстве ему нанесли несколько сабельных ударов по голове, один из которых рассек обе губы и повредил верхнюю челюсть и нёбо. Со временем раны затянулись, но остался уродливый шрам, которого Никколо очень стыдился. Мальчик долгое время говорил с трудом, заикаясь. Сверстники дразнили его "Тартальей". Под этим именем он и вошел в историю науки.

•Фиоре был убежден, что "скорее божественное, чем человеческое" открытие дель Ферро не под силу скромному самоучке-учителю, и Тарталья решить задачи не сможет. Соперники передали друг другу через нотариуса 30 задач, на решение которых отводилось 50 дней. Победителем становился тот, кто в течение этого срока решит большее число задач. Проигравший должен был оплатить обед победителя и двадцати девяти его друзей.

Уже после заключения условий состязания Тарталья обнаружил, что все задачи Фиоре сводятся к решению уравнения $x^3 + qx = r$, и до него дошли слухи, что соперник получил от дель Ферро формулу его решения. Тарталья, дабы избежать позора поражения и затрат на парадный обед, предпринял неимоверные усилия, чтобы найти "великое правило", над которым математики бились на протяжении почти двух тысячелетий.

Итак, в ночь с 12 на 13 февраля 1535 года Тарталья открыл вожделенную формулу. Во время диспута он за два часа одолел все задачи Фиоре, а его противник не справился ни с одним из предложенных ему вопросов из различных областей математики.

•**1537–1538 годы**. Кардано пытается самостоятельно найти способ решения кубического уравнения. Безошибочное чутье подсказывает ему, что, опубликуй он "великое правило" в своей первой математической книге, – слава знаменитого математика ему обеспечена. Но все его попытки безуспешны, и к концу 1538 года он решил выведать "алгебраический секрет" у тех, кто им владел. К кому обратиться – к Фиоре или к Тарталье? Джероламо выбрал последнего. Правда, он знал, что Никколо никому не раскрывал тайны, но надеялся, что скромный учитель не вполне понимает значение своего изобретения и не устоит перед льстивыми словами, деньгами, а может быть, и перед хитростью. В конце концов секрет формулы оказался в руках Кардано.

•Далее, используя эту формулу, Кардано и его ученик Луиджи Феррари получили много новых выдающихся результатов, но Кардано, связанный клятвой - не разглашать формулу - не мог сделать их публичным достоянием. Однако в 1543 году произошло событие, снявшее моральные затруднения с Кардано. К своему превеликому удовольствию, Кардано и Феррари обнаружили рукопись Сципиона дель Ферро, а в ней формулу, сообщенную Тартальей. Значит, упрямый Никколо не был первооткрывателем, и у него можно не испрашивать разрешения на публикацию "великого правила"! С этого момента Джироламо начал систематизировать все известное ему в алгебре и готовить к изданию новую книгу.

1545 год, Нюрнберг

Выходит в свет книга Кадано "Великое искусство" с формулой решения кубического уравнения, что, конечно, весьма не понравилось Тарталье.

• Разрешить распри соперники решили в публичном диспуте. **1548 год, 10 августа, Милан.**

В этот день около шести часов вечера в церкви Св. Марии собралось множество горожан, военных, знатных синьоров, университетских преподавателей и студентов, которые хотели присутствовать на математическом диспуте. Наконец появились соперники – Луиджи Феррари явился с огромной толпой своих знатных и незнатных друзей, а Никколо Тарталью сопровождал лишь брат. Что же до "главного виновника" – Кардано, – то, узнав о диспуте, он уехал из города. В присутствии главного арбитра, правителя Милана, и многотысячной толпы соперники должны были доказать правильность решений, приведенных ими в вызовах и ответах…

• Победителем спора вышел Феррари….

•Сейчас, за давностью описанных событий, вряд ли можно с уверенностью назвать правого в этом споре. В настоящее время большинство историков сходится на следующем:

• дель Ферро первым нашел формулу для решения кубического уравнения;
• Фиоре узнал формулу от своего учителя;
• Тарталья независимо от них **сам** нашел способ решения этого уравнения;
• Кардано разработал полную теорию решения любого уравнения третьей степени;
• Феррари предложил способ решения уравнения четвертой степени.

Их коллективные усилия открыли новую страницу в развитии математики. Менее чем за пятьдесят лет итальянским ученым удалось "исчерпать" возможности алгебраических методов решения уравнений. И лишь в 1826 году Нильс Хенрик Абель доказал неразрешимость уравнений пятой степени в радикалах.

Выведем формулу корней уравнения 3-ей степени:

Кубическое уравнение – уравнение вида $\boldsymbol{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$, где $\boldsymbol{a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0}$.

• $\boldsymbol{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0} \quad | : \ \boldsymbol{a_3 \neq 0}$ (по усл.)

$$\boldsymbol{x^3 + \frac{a_2}{a_3} \cdot x^2 + \frac{a_1}{a_3} \cdot x + \frac{a_0}{a_3} = 0}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{a_2}{a_3} = a;} \\ \boldsymbol{\dfrac{a_1}{a_3} = b;} \\ \boldsymbol{\dfrac{a_0}{a_3} = c;} \\ \boldsymbol{x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.} \end{cases}$$

• **Сделаем замену:** $\boldsymbol{x = y - \frac{a}{3}}$**. Получим:** $\boldsymbol{\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a \cdot \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b \cdot \left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow}$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \left(y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot \frac{a}{3} + 3 \cdot y \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3\right) + a \cdot \left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{a}{3} + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + b \cdot y - b \cdot \frac{a}{3} + c = 0 \Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow y^3 - \underline{y^2\cdot a} + \underline{\underline{y\cdot\frac{a^2}{3}}} - \underline{\underline{\underline{\frac{a^3}{27}}}} + \underline{a\cdot y^2} - \underline{\underline{y\cdot\frac{2a^2}{3}}} + \underline{\underline{\underline{\frac{3\cdot a^3}{27}}}} + b\cdot y - b\cdot\frac{a}{3} + c = 0 \Leftrightarrow y^3 - y\cdot\frac{a^2}{3} + \frac{2\cdot a^3}{27} + b\cdot y - b\cdot\frac{a}{3} + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^3 - y\cdot\left(\frac{a^2}{3}+b\right) - b\cdot\frac{a}{3} + \frac{2\cdot a^3}{27} + c = 0.$$

$$\begin{cases} p = -\frac{a^2}{3} - b \\ q = c - b\cdot\frac{a}{3} + \frac{2\cdot a^3}{27} \\ y^3 + p\cdot y + q = 0 \end{cases};\ \begin{cases} y^3 + p\cdot y + q = 0\ (*) \\ y = z - \frac{p}{3z}\quad (z\neq 0) \end{cases}$$

$$(*)\left(z-\frac{p}{3z}\right)^3 + p\cdot\left(z-\frac{p}{3z}\right) + q = 0 \Leftrightarrow z^3 - 3\cdot z^2\cdot\frac{p}{3z} + 3\cdot z\cdot\left(\frac{p}{3z}\right)^2 - \left(\frac{p}{3z}\right)^3 + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \left(\frac{p}{3z}\right)^3 + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0 \Leftrightarrow z^3 - \left(\frac{p}{3z}\right)^3 + q = 0 \Leftrightarrow z^6 + q\cdot z^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Пусть $z^3 = t$**. Тогда** $t^2 + q\cdot t - \frac{p^3}{27} = 0$**.** $D = q^2 + 4\cdot\frac{p^3}{27}$**.**

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{-q+\sqrt{q^2+4\cdot\frac{p^3}{27}}}{2} \\ t = \frac{-q-\sqrt{q^2+4\cdot\frac{p^3}{27}}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2+4\cdot\frac{p^3}{27}}}{2} \\ t = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2+4\cdot\frac{p^3}{27}}}{2} \end{array}\right..\quad \left[\begin{array}{l} z^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \\ z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \end{array}\right..$$

Вспомним, что $y = z - \frac{p}{3z}\quad (z\neq 0)$**. Тогда**

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}};\ y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}.$$

Докажем, что $y_1 = y_2$**.**

I способ:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\left(-\frac{p}{3}\right)} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p*\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3*\left(-\frac{p}{3}\right)} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Значит, $\boldsymbol{y_1 = y_2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$

II способ: $\boldsymbol{t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0}$; по теореме Виета $\boldsymbol{t_1 \cdot t_2 = -\frac{p^3}{27}}$; $\boldsymbol{z^3 = t}$; $\boldsymbol{z=\sqrt[3]{t}}$;

$z_1 \cdot z_2 = \sqrt[3]{t_1}\cdot\sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{t_1\cdot t_2} = -\frac{p}{3}$; $z_1 = -\frac{p}{3\cdot z_2}$; $z_2 = -\frac{p}{3\cdot z_1}$. $y = z - \frac{p}{3\cdot z}$; $y_1 = z_1 - \frac{p}{3\cdot z_1} = z_1 + z_2$; $y_2 = z_2 - \frac{p}{3\cdot z_2} = z_2 + z_1$.

Таким образом, $\boldsymbol{y_1 = y_2 = z_1 + z_2 = z_1 - \frac{p}{3\cdot z_1}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$

Итак, $\boxed{\boldsymbol{y_1 = y_2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$; $\boldsymbol{q = c - \frac{a*b}{3} + \frac{2*a^3}{27}}$; $\boldsymbol{p = -\frac{a^2}{3} + b}$; $\boldsymbol{x = y - \frac{a}{3}}$.

Таким образом, мы находим один из корней исходного кубического уравнения. Обозначим этот корень, как α. Чтобы найти остальные корни (если они принадлежат множеству действительных чисел), разделим исходный кубический многочлен на $(x-\alpha)$ $\Longrightarrow x^3 + a*x^2 + b*x + c = (x-\alpha)*(x^2+d*x+g)$ и найдём корни полученного квадратного трёхчлена регулярными методами. Хотя, изучая знак выражения $q^2 + \frac{4*p^3}{27}$, называемого дискриминантом кубического уравнения, можно понять, сколько вещественных корней имеет исходное кубическое уравнение.

Дискриминант кубического уравнения: $\boldsymbol{D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

$\boldsymbol{D < 0}$. **Уравнение имеет три различных вещественных корня.**

$\boldsymbol{D = 0}$. **Тогда хотя бы два корня совпадают. Это может быть, когда уравнение имеет один вещественный корень, кратности два, и ещё один вещественный корень, отличный от первых двух. Или все три корня совпадают.**

$\boldsymbol{D > 0}$. **Уравнение имеет один вещественный и пару комплексных корней.**

Пример:

1) $x^3+3x-4=0$. Очевидно, что один из корней равен 1. Но по формуле:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{-4}{2}+\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{3^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{-4}{2}-\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{3^3}{27}}}=\sqrt[3]{\mathbf{2+\sqrt{4+1}}}+\sqrt[3]{\mathbf{2-\sqrt{4+1}}}=\sqrt[3]{\mathbf{2+\sqrt{5}}}+\sqrt[3]{\mathbf{2-\sqrt{5}}}.$$

$$\sqrt[3]{\mathbf{2+\sqrt{5}}}+\sqrt[3]{\mathbf{2-\sqrt{5}}}=\mathbf{1}\ (???).\qquad \mathbf{2+\sqrt{5}}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3;\ \mathbf{2-\sqrt{5}}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3;\ x=\sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\mathbf{1}$$

2) $x^3+x+3=0$. По формуле: $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$; $q=1$; $p=3$.

$$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}+\sqrt[3]{-\sqrt{5}-1}\right).$$

Итак, уравнения третьей степени разрешимы. (Разрешимы и уравнения четвёртой степени!

Продолжение следует.)

Решение уравнений 4-ой степени. Метод Феррари.

•Рассмотрим уравнение четвёртой степени: $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0,\qquad (1)$

где a_4, a_3, a_2, a_1, a_0- произвольные вещественные числа, причём $a_4\neq 0$.

• Метод Феррари состоит из двух этапов:

1) Уравнения вида (1) приводятся к уравнениям четвёртой степени, у которых отсутствуют члены с третьей степенью неизвестного.
2) Далее полученные уравнения решаются при помощи разложения на множители. Но для того, чтобы найти требуемое разложение на множители, требуется решать кубические уравнения.

Приведение уравнений 4-ой степени:

• Разделим уравнеие (1) на старший коэффициент a_4. Тогда оно примет вид: $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,\quad (2)$

$$\left(y-\frac{a}{4}\right)^4+a\left(y-\frac{a}{4}\right)^3+b\left(y-\frac{a}{4}\right)^2+c\left(y-\frac{a}{4}\right)+d=0\Leftrightarrow\qquad(3)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y^4-4y^3\cdot\frac{a}{4}+6y^2\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2-4y\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^3+\left(\frac{a}{4}\right)^4}+a\cdot\left(\mathbf{y^3-3y^2\frac{a}{4}+3y\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\right)^3}\right)+b\cdot\left(\mathbf{y^2-2y\cdot\frac{a}{4}+\left(\frac{a}{4}\right)^2}\right)+\mathbf{cy}-\frac{ca}{4}+\mathbf{d}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y^4}\boxed{\mathbf{-ay^3}}+\mathbf{\frac{3}{8}y^2\cdot a^2-\frac{1}{16}ya^3+\frac{a^4}{256}}\boxed{\mathbf{+ay^3}}\mathbf{-\frac{3}{4}y^2\cdot a^2+\frac{3}{16}y\cdot a^3-\frac{a^4}{64}+by^2-\frac{1}{2}bya+\frac{b\cdot a^2}{16}+cy}-\frac{ca}{4}+\mathbf{d}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y^4+y^2\left(\frac{3}{8}a^2-\frac{3}{4}a^2+b\right)+y\left(-\frac{1}{16}a^3+\frac{3}{16}a^3-\frac{1}{2}ba+c\right)+\frac{a^4}{256}-\frac{a^4}{64}+\frac{b\cdot a^2}{16}-\frac{ca}{4}+d=0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y^4+y^2\left(b-\frac{3}{8}a^2\right)+y\left(\frac{a^3}{8}-\frac{ba}{2}+c\right)-\frac{3a^4}{256}+\frac{a^2b}{16}-\frac{ca}{4}+d=0.}\qquad(4)$$

Если ввести обозначения: $\boldsymbol{p=b-\frac{3}{8}a^2;\ \ q=\frac{a^3}{8}-\frac{ba}{2}+c;\ \ r=-\frac{3a^4}{256}+\frac{a^2b}{16}-\frac{ca}{4}+d,}$

то уравнение (4) примет вид

$\boldsymbol{y^4+py^2+qy+r=0,}$ **(5) где $\boldsymbol{p,q,r}$ —** вещественные числа.

Разложение на множители. Кубическая резольвента.

Добавляя и вычитая к левой части уравнения (5) выражение $2sy^2+s^2$, где s – некоторое число, которое мы определим позже, получим

$$\boldsymbol{y^4+py^2+qy+r+2sy^2+s^2-2sy^2-s^2=0 \Leftrightarrow (y^2+s)^2+(p-2s)y^2+qy+r-s^2=0 \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow (y^2+s)^2+(p-2s)\left(y^2+\frac{qy}{p-2s}\right)+r-s^2=0 \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow (y^2+s)^2+(p-2s)\left(y^2+\frac{2qy}{2(p-2s)}+\left(\frac{q}{2(p-2s)}\right)^2\right)-\frac{q^2}{4(p-2s)}+r-s^2=0 \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow (y^2+s)^2+(p-2s)\left(y+\frac{q}{2(p-2s)}\right)^2-\frac{q^2}{4(p-2s)}+r-s^2=0} \qquad \textbf{(6)}$$

Выберем число s так, чтобы $-\frac{q^2}{4(p-2s)}+r-s^2=0$ (7) , то есть так, чтобы s - являлось корнем уравнения (7). Тогда уравнение (6) примет вид $(y^2+s)^2+(p-2s)\left(y+\frac{q}{2(p-2s)}\right)^2=0$ (8). Далее преобразуем уравнение(7) : $-\frac{q^2}{4(p-2s)}+r-s^2=0 \Leftrightarrow (r-s^2)(p-2s)-\frac{q^2}{4}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{2s^3-ps^2-2rs+rp-\frac{q^2}{4}=0}$ (9). Уравнение (9) называют кубической резольвентой уравнения 4-й степени (5).

Если какое-то решение кубической резольвенты (9) найдено, то уравнение (8) можно решить, разложив его левую часть на множители с помощью формулы сокращённого умножения. Действительно,

$$(y^2+s)^2+(p-2s)\left(y+\frac{q}{2(p-2s)}\right)^2=0 \Leftrightarrow (y^2+s)^2-(2s-p)\left(y+\frac{q}{2(p-2s)}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y^2+s)^2-\left(\sqrt{2s-p}\cdot y-\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+s+\sqrt{2s-p}\cdot y-\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}\right)\left(y^2+s-\sqrt{2s-p}\cdot y+\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}\right)=0$$

Таким образом, для решения уравнения (8) остаётся решить квадратные уравнения:

$y^2+\sqrt{2s-p}\cdot y-\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}+s=0$ и $y^2-\sqrt{2s-p}\cdot y+\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}+s=0.$ (10)

Вывод метода Феррари завершён.

Пример. Решить уравнение: $x^4+4x^3-4x^2-20x-5=0$. $(a=4;\ b=-4;\ c=-20;\ d=-5)$.

Решение: Сделаем в уравнении замену $x=y-1$.

Получим: $(y-1)^4+4(y-1)^3-4(y-1)^2-20(y-1)-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^4-4y^3+6y^2-4y+1+4y^3-12y^2+12y-4-4y^2+8y-4-20y+20-5=0 \Leftrightarrow y^4-10y^2-4y+8=0.$

В соответствии с уравнением (5) $\boldsymbol{p=-10;\ q=-4;\ r=8,}$

а кубическая резольвента: $\boldsymbol{2s^3+10s^2-16s-84=0 \Leftrightarrow s^3+5s^2-8s-42=0.}$

Целым корнем кубической резольвенты является число $s=-3$. Подставим это значение s в уравнения (10):

$y^2+2y-2=0$ и $y^2-2y-4=0$.

Корни этих уравнений: $y_1=-1+\sqrt{3};\ y_2=-1-\sqrt{3};\ \ y_3=1+\sqrt{5};\ y_4=1-\sqrt{5}$.

Вспомним, что $x=y-1$. Тогда $x_1=\sqrt{3}-2;\ x_2=-2-\sqrt{3};\ \ y_3=\sqrt{5};\ y_4=-\sqrt{5}$.